Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar **debidamente justificadas**. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Apellido: ………………………………….Nombres:……………………………………………

Padrón:………………………

1. Sea la integral $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{-4+\sqrt{x^2+z^2}}^{4-\sqrt{x^2+z^2}} dydxdz$
   a) Describir la región de integración e interpretar su significado.
   b) Calcular la integral.
2. Sea Σ la superficie de ecuación $yz + e^{xz-2} + \ln(x+y-2) - 2 = 0$
   Sea S la porción del plano tangente a Σ en el punto (2,1,1) perteneciente al primer octante.
   Calcular el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = \left(-\frac{3}{2}y\ ,\ x+y\ ,\ y+z-2\right)$ a través de S, indicando en un gráfico el sentido de la normal utilizada.
3. Sea el campo $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{y^2}{2},\ 2xy + g(y)\right)$ con g $\in C^1(\Re)$. Calcular la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva frontera de la región $D = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \le 9; y \ge x; y \ge -x\}$
   Indicar en un gráfico el sentido de circulación utilizado.
4. Sea el campo $\vec{f}(x,y,z) = \left(a^2x - ax, b^2y - by, abz\right)$ *con* $a,b \in \Re$
   Sea la región $D = \{(x,y,z) \in \Re^3 : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1; 0 \le z \le 1\}$
   Hallar, si existen, los valores de *a* y *b* para que el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera de *D* sea mínimo.
   Considerar la normal saliente al sólido *D*.
5. Sea *C* la curva definida por la intersección de las superficies *z =xz+ln(yz-1) ; 2x + y² + z² =7.*
   Sea *r* la recta tangente a *C* en el punto (1,1,2) y sean A , B los puntos de intersección de *r* con los planos *x = 0* e *y = 0* respectivamente.
   Calcular la circulación del campo $\vec{f}(x,y,z) = \left(e^z y, e^z x, e^z xy\right)$ a lo largo del segmento AB

1. Sea la integral $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{-4+\sqrt{x^2+z^2}}^{4-\sqrt{x^2+z^2}} dydxdz$

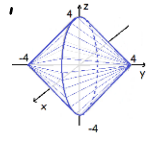
a) Describir la región de integración e interpretar su significado.

Al resolver la integral se hallará el volumen que contenido por las superficies que limitan la integración.

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{-4+\sqrt{x^2+z^2}}^{4-\sqrt{x^2+z^2}} dydxdz = \int_{-2}^{2}dz\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}dx\int_{-4+\sqrt{x^2+z^2}}^{4-\sqrt{x^2+z^2}}dy$$

$$\begin{cases} -4+\sqrt{x^2+z^2} \le y \le 4-\sqrt{x^2+z^2} \ (A) \\ -\sqrt{4-z^2} \le x \le \sqrt{4-z^2} \quad (B) \\ -2 \le z \le 2 \ (C) \end{cases}$$

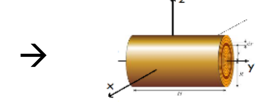
(A) ← dos semiconos con eje sobre el eje ' y '

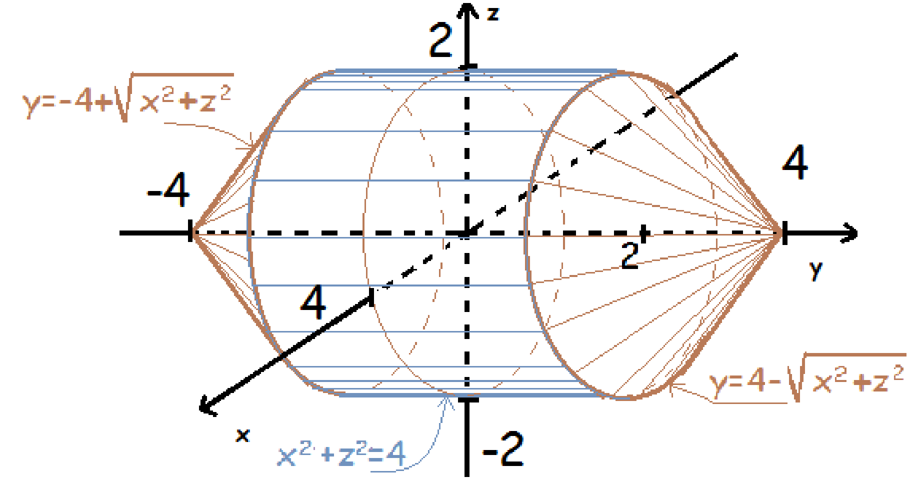


(B) ← cilindro sobre eje ' y ' de radio 2

(C) ← valores mínimo y máximo de z

$(B)\ \ x=\sqrt{4-z^2} \to x^2 = 4-z^2 \to x^2+z^2=4$ →





b) Calcular la integral

Por la forma que tiene el sólido, conviene usar coordenadas cilíndricas, proyectando sobre el plano xz.

Parametrización de la superficie: $\delta_{(r,y,t)}$ = (r.cos (t), y , r.sen (t))

$0 \le r \le 2$

$0 \le t \le 2\pi$

$-4 + r \le y \le 4 - r$ ←
$$\begin{cases} -4+\sqrt{x^2+z^2} = -4+\sqrt{r^2} \overset{r\ge 0}{=} -4+r; \\ 4-\sqrt{x^2+z^2} = 4-\sqrt{r^2} \overset{r\ge 0}{=} 4-r \end{cases}$$

$$Vol = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{-4+\sqrt{x^2+z^2}}^{4-\sqrt{x^2+z^2}} dydxdz \overset{C.V.}{=} \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{-4+r}^{4-r} \overset{jacobiano}{r} \ .dydrdt =$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2} \overbrace{r(4-r-(-4+r))}^{8r-2r^2}drdt = \int_{0}^{2\pi} 4r^2 - \frac{2r^3}{3}\Big|_0^2 dt = \int_{0}^{2\pi}\frac{32}{3}dt = \frac{64}{3}\pi$$

$$\boxed{Vol = \frac{64}{3}\pi}$$

2. Sea Σ la superficie de ecuación $yz + e^{xz-2} + \ln(x+y-2) - 2 = 0$

Sea S la porción del plano tangente a Σ en el punto (2,1,1) perteneciente al primer octante.

Calcular el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = \left(-\frac{3}{2}y\ ,\ x+y\ ,\ y+z-2\right)$ **a través de S, indicando en un gráfico el sentido de la normal utilizada.**

Sea $g: D \subseteq \Re^3 \to \Re \ /\ g(x,y,z) = yz + e^{xz-2} + \ln(x+y-2) - 2$

La superficie Σ es el conjunto de nivel 0 de g(x,y,z). La Normal a Σ es proporcional al gradiente de g en el mismo punto. En este ejercicio la proporción es irrelevante, pues sólo interesa saber la dirección del gradiente para hallar la ecuación del plano tangente. Por lo tanto, busco el gradiente de g:

$$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = z.e^{xz-2} + \frac{1}{x+y-2} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(2,1,1) = 1.e^{2.1-2} + \frac{1}{2+1-2} = 2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(2,1,1) = 2 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = z + \frac{1}{x+y-2} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(2,1,1) = 1 + \frac{1}{2+1-2} = 2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(2,1,1) = 2 \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = y + x.e^{xz-2} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z}(2,1,1) = 1 + 2.e^{2.1-2} = 3 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z}(2,1,1) = 3 \end{cases}$$

$$\nabla g(2,1,1) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(2,1,1), \frac{\partial g}{\partial y}(2,1,1), \frac{\partial g}{\partial z}(2,1,1)\right) = (2,2,3) \to N_{\Sigma} en P = (2,2,3)\ \ , siendo\ P = (2,1,1)$$

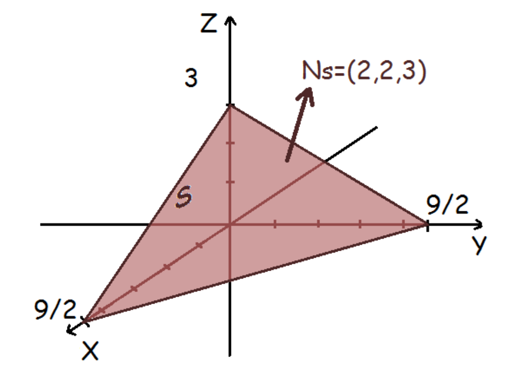
Sea π el plano tangente a Σ en el punto P:

π: N_Σ . (x,y,z)=d, donde d=N_Σ.P → d = (2,2,3) . (2,1,1) = 9, por lo tanto:

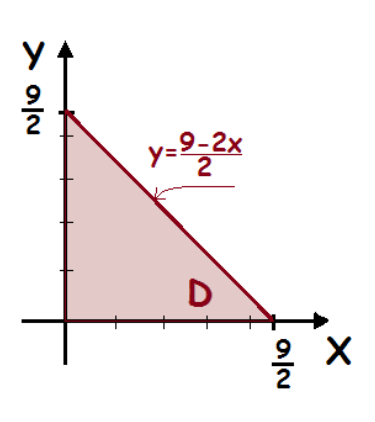
π: 2x + 2y + 3z = 9

Como S es la porción de π perteneciente al primer octante, para dibujarlo busco las intersecciones de este plano con x=0, y=0, z=0

en plano yz: y=(9-3z)/2 ; en plano xz: x=(9-3z)/2 ; en plano xy: y=(9-2X)/2



La superficie S está dada por la ecuación de π, por lo que z = 3 – 2/3.x – 2/3.y Analizo su proyección sobre el plano xy: →



Para calcular el flujo conviene parametrizar la superficie S:

$$\alpha(u,v)=(u,v,3-\tfrac{2}{3}u-\tfrac{2}{3}v)\ ;\ 0\le u\le \tfrac{9}{2}\ ;\ 0\le v\le \tfrac{9-2u}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha'u=(1,0,-\tfrac{2}{3})\\ \alpha'v=(0,1,-\tfrac{2}{3})\end{array}\right\} N=\alpha'u\ \ x\ \ \alpha'v=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\right)\rightarrow \|N\|=\frac{\sqrt{17}}{3}$$

$$\iint_S \vec{f}.d\vec{s}=\iint_S \vec{f}(\alpha(u,v,)).\overbrace{\frac{N}{\|N\|}ds}^{d\bar{s}}=\iint_S\left(\overbrace{-\tfrac{3}{2}v}^{-\frac{3}{2}y},\ \overbrace{u+v}^{x+y},\ \overbrace{v+\underbrace{3-\tfrac{2}{3}u-\tfrac{2}{3}v}_{z}-2}^{y+z-2}\right)\frac{\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\right)}{\|N\|}ds=$$

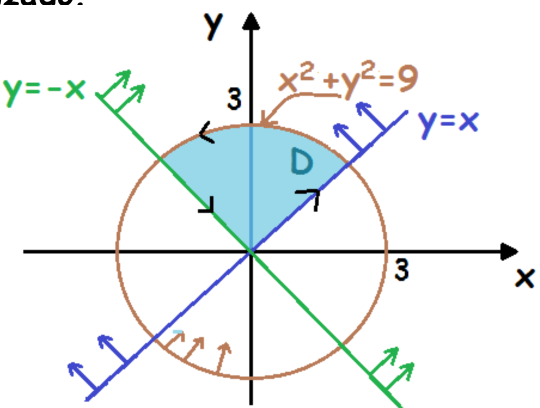
$$=\iint_S\left(-v+\tfrac{2}{3}u+\tfrac{2}{3}v+v+3-\tfrac{2}{3}u-\tfrac{2}{3}v-2\right)\frac{ds}{\|N\|}=\iint_S\frac{1}{\|N\|}ds=\iint_D\frac{1}{\|N\|}\overbrace{\|N\|du.dv}^{ds}=\iint_D du\,dv=$$

$$=\int_0^{\frac{9}{2}}\int_0^{\frac{9-2u}{2}}dv\,du=\int_0^{\frac{9}{2}}\frac{9-2u}{2}du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{9}{2}}(9-2u)u\,du=\frac{1}{2}.(9u-u^2)\Big|_0^{\frac{9}{2}}=\frac{1}{2}.\frac{81}{4}=\frac{81}{8}$$

$$\boxed{\iint_S \vec{f}\,d\vec{s}=\frac{81}{8}}$$

3. Sea el campo $\vec{f}(x,y)=\left(\frac{y^2}{2},\ 2xy+g(y)\right)$ **con g** $\in C^1(\Re)$**. Calcular la circulación de** $\vec{f}$ **a lo largo de la curva frontera de la región** $D=\left\{(x,y)\in\Re^2 : x^2+y^2\le 9;\ y\ge x;\ y\ge -x\right\}$

Indicar en un gráfico el sentido de circulación utilizado.



Analizo la forma de D:

$x^2+y^2 \le 9$	→	disco centrado de radio máximo 3, centrado en el origen
$y \ge x$	→	los puntos que están por encima de la recta y=x
$y \ge x$	→	los puntos que están por encima de la recta y=-x

Por la forma de D puede ser que utilice el Teorema de Green para calcular la circulación. Por lo tanto voy a verificar si se cumplen sus hipótesis:

I) Sea $\vec{f}(x,y)=(P(x,y),\ Q(x,y))\,;\ \vec{f}:\Re^2\to\Re^2 \in C^1(\Re^2)$, pues P(x,y) es un polinomio → $P_{(x,y)}$ ε C^∞ (R^2) y $Q_{(x,y)}$ es suma algebraica de un polinomio con una función g ε $C^1(R)$ → $Q_{(x,y)}$ ε C^1 (R^2) √

II) Sea C la curva frontera de D.
D es una región compacta cuyo borde C es cerrada y suave por trozos. √

Se verificaron las hipótesis, por lo tanto:

$$\oint_{C^+} \vec{f}\,d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\left.\begin{aligned} P(x,y)=\frac{y^2}{2} &\to \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=y \\ Q(x,y)=2xy+g(y) &\to \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=2y \end{aligned}\right\} \to \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2y-y=y$$

Para calcular la integral conviene pasar a coordenadas polares:

$$\beta(r,t)=(r.\cos(t)\ ,\ r.sen(t))\,;\ 0\le r\le 3\,;\ \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{3}{4}\pi$$

$$\oint_{C^+}\vec{f}\,d\vec{l}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D y.dxdy \overset{C.V.}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^3 \underbrace{r.sen(t)}_{y}.\ \underbrace{r}_{jacobiano}\ dr\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^3 r^2.sen(t)\,dr\,dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} sen(t).\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^3 dr\,dt=9\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} sen(t)\,dt=9.(-\cos(t))\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=9\sqrt{2}$$

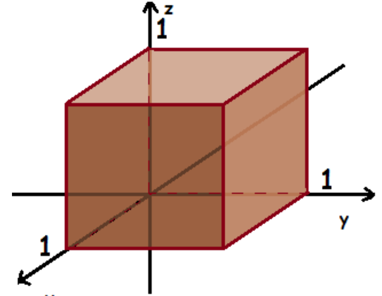
$$\boxed{\oint_{C^+}\vec{f}\,d\vec{l}=9\sqrt{2}}$$

4. Sea el campo $\vec{f}(x,y,z)=\left(a^2x-ax,b^2y-by,abz\right)$ *con* $a,b\in\Re$

Sea la región $D=\left\{(x,y,z)\in\Re^3:0\le x\le 1;0\le y\le 1;0\le z\le 1\right\}$

Hallar, si existen, los valores de a y b para que el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera de D sea mínimo.

Considerar la normal saliente al sólido D.



Analizo la forma de D:

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1\\0\le z\le 1\end{cases}\quad\rightarrow \text{Es un cubo de lado 1, en el primer octante}$$

Por la forma de D puede ser que para calcular el flujo de $\vec{f}$ sobre la superficie pueda utilizar el Teorema de Gauss. Por lo tanto voy a verificar si se cumplen sus hipótesis:

I) Sea $\vec{f}(x,y,z)=(P(x,y,z),\,Q(x,y,z),R(x,y,z))\,;\vec{f}:\Re^3\rightarrow\Re^3\in\ C^{\infty}\left(\Re^3\right)$, pues P(x,y,z), Q(x,y,z) y R(x,y,z) son polinomios → $\vec{f}$ ε C^1 (R^3) ✓

II) Sea *S* la superficie frontera de D, una superficie orientada hacia el exterior.

III) *D* es una región en R^3 contenida por la superficie. ✓

Se verificaron las hipótesis, por lo tanto: $\iint_S \vec{f}.d\vec{s}=\iiint_D div.\vec{f}\,dVol$

$div.\vec{f}=\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\dfrac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)=a^2-a+b^2-b+ab$ → el flujo es proporcional al volumen (pues div.f resultó ser un escalar con una función que depende de las variables a y b). Entonces, para encontrar el mínimo valor del flujo alcanza con encontrar los a y b que hacen que el resultado de esa ecuación sea mínimo.

Sea g(a,b) = a^2 – a + b^2 –b + ab, calculo sus mínimos (minimizando esa función). Para eso observo en qué puntos (a,b) el gradiente de g se anula:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial a}(a,b)=2a-1+b=0\rightarrow b=-2a+1\\ \dfrac{\partial g}{\partial b}(a,b)=2b-1+a=0\rightarrow a=-2b+1\end{array}\right\}\rightarrow b=-2(-2b+1)+1=4b-2+1\rightarrow b=\frac{1}{3}\rightarrow a=\frac{1}{3}$$

Como es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el resultado es único. Ahora analizo si es un mínimo local mediante el hessiano:

$$H(a,b)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 g}{\partial aa}(a,b) & \dfrac{\partial^2 g}{\partial ab}(a,b)\\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial ba}(a,b) & \dfrac{\partial^2 g}{\partial bb}(a,b)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=3>0\wedge\overbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial aa}(a,b)}^{2}>0\therefore\ es\ un\ \ mínimo\ \ relativo$$

$$\boxed{a=\frac{1}{3}\quad;\ b=\frac{1}{3}}$$

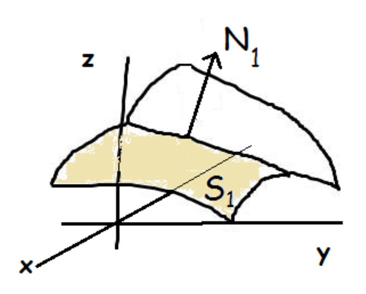
5. Sea *C* la curva definida por la intersección de las superficies *z =xz+ln(yz-1)* ; *2x + y² + z² =7*.

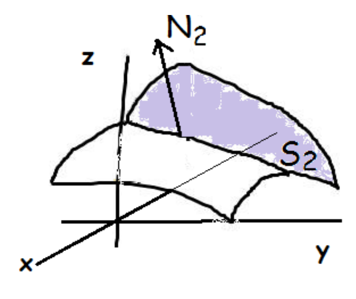
Sea *r* la recta tangente a *C* en el punto (1,1,2) y sean *A* , B los puntos de intersección de *r* con los planos *x = 0* e *y = 0* respectivamente.

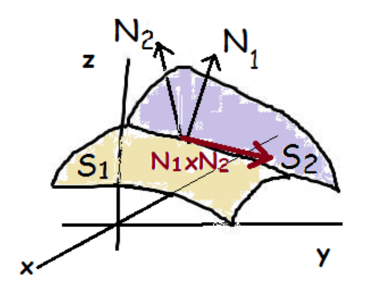
Calcular la circulación del campo $\vec{f}(x,y,z)=\left(e^z y, e^z x, e^z xy\right)$ **a lo largo del segmento *AB***

Buscar la intersección de esas superficies parece algo horrible (y lo es). Entonces, hay que apelar a la imaginación y a los conocimientos globales de la materia: Si lo que quiero encontrar es la tangente de una intersección de dos superficies, puedo hallar el producto vectorial de sus Normales… y así hallo la dirección de esa recta.

Un ejemplito gráfico para que se entienda el concepto:







Para hallar esas Normales (N_S y N_T) voy a armar dos funciones:

Sea: ***S*** : xz + ln(yz-1) – z = 0

T : 2x + y² + z² – 7 = 0

$g_{(x,y,z)}$= xz + ln(yz-1) – z

$h_{(x,y,z)}$= 2x + y² + z² – 7

Entonces podemos decir que ***S*** es el conjunto de nivel 0 de ***g*** y ***T*** es el conjunto de nivel 0 de ***h***. Como los gradientes de ***g*** y de ***h*** son proporcionales a N_S y N_T respectivamente, entonces hallo $\nabla g \;\; y \;\; \nabla h$ para obtener las direcciones de N_S y N_T para hacer el producto vectorial entre ellas, tal como lo expliqué antes.

$$\nabla g(x,y,z)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=z & \rightarrow \quad \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1,2)=2 \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=\dfrac{z}{xy-1} & \rightarrow \quad \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,2)=2 \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=x+\dfrac{y}{yz-1}-1 & \rightarrow \quad \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,2)=1 \end{cases} \qquad \nabla g(1,1,2)=\left(2,\ 2,1\right)=\lambda N_S$$

$$\nabla h(x,y,z)=\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z)\ ,\ \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z)=2 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z)=2y \\ \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)=2z \end{array}\right. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x}(1,1,2)=2 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(1,1,2)=2 \\ \frac{\partial h}{\partial z}(1,1,2)=4 \end{array}\right\} \quad \nabla h(1,1,2)=(2,\ 2,4)=\beta N_T$$

Como para hacer el producto vectorial sólo necesito las direcciones de las normales, entonces puedo tomar (arbitrariamente) λ=β=1.

$N_S \times N_T$ = (2,2,1) x (2,2,4) = (6,-6,0) → la recta tangente a *C* tiene dirección (1,-1,0) y pasa por el punto (1,1,2). Por lo tanto la recta tangente es:

r : (x,y,z) = δ (1,-1,0) + (1,1,2)

El punto ***A*** pertenece al plano x = 0 → δ = -1 → A = (0,2,2)

El punto ***B*** pertenece al plano y = 0 → δ = 1 → B = (2,0,2)

Parametrizo la recta: β(t) = (t+1,-t+1,2) ; t ∈ [-1,1]

β ' (t) = (1,-1,0)

$$\int_C \vec{f}.d\vec{l} = \int_C f(\beta(t)).\beta'(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \Big(\overbrace{e^2(-t+1)}^{e^z y}, \overbrace{e^2(t+1)}^{e^z x}, \overbrace{e^2(t+1)(-t+1)}^{e^z xy}\Big).\overbrace{(1,-1,0)}^{\beta'(t)}\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(-e^2 t + e^2 - e^2 t - e^2\right)dt = \int_{-1}^{1}\left(-2e^2 t\right)dt = -2e^2\int_{-1}^{1} t.dt = 0$$

$$\boxed{\int_C \vec{f}.d\vec{l} = 0}$$

¡¡ ÉXITOS PARA EL EXAMEN !!

"El genio se hace con 1% de talento y 99% de trabajo" (Albert Einstein)

(si encuentran un error en la resolución, o algo que está mal explicado o confuso, por favor escríbanme a sylvina64@gmail.com)